

EXAMEN D'ANALYSE III

Session de rattrapage

Durée : 1 heure

Exercice 1 (6 points)

1. Soit $x > 0$. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 de la fonction $y \mapsto \sin(y)$ sur l'intervalle $[0, x]$.
2. En déduire que, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$$

3. La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est-elle convexe ou concave sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$? Justifier votre réponse.

Exercice 2 (7 points)

1. Déterminer le développement limité d'ordre 4 en 0 de la fonction $f : x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$.
2. En déduire le développement limité d'ordre 4 en 0 de la fonction $\frac{1}{f} : x \mapsto \frac{x^2}{1 - \cos(x)}$.
3. Déterminer le développement asymptotique d'ordre 2 au point 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1 - \cos(x)}$.

Exercice 3 (6 points)

1. Déterminer le développement limité d'ordre 1 en 0 de la fonction $x \mapsto (1 + x)^{\frac{1}{x}}$.
2. Donner un équivalent simple au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto (1 + x)^{\frac{1}{x}} - e$.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$.

BONNE CHANCE

Remarque. 1 point sera réservé à la présentation de la copie et à la qualité de rédaction.